



Zeszyty Naukowe
Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu
Nr 3(41)/2014

Jacek Jagodziński

Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu

Rozszerzone kryterium Hurwicza podejmowania decyzji w procesach logistycznych

Streszczenie. Artykuł prezentuje nowe kryterium decyzyjne bazujące na popularnym kryterium Hurwicza, znanym z teorii gier z naturą. Zostały w nim przedstawione własności funkcji decyzyjnej tego kryterium, zastosowane następnie do nowego algorytmu podejmowania decyzji. Wspomniane podejście może służyć również jako nowa taktyka wyboru lub oceny współczynnika optymizmu w tradycyjnym kryterium Hurwicza.

Słowa kluczowe: logistyka, problemy decyzyjne, gry z naturą, kryterium Hurwicza, współczynnik optymizmu

Wstęp

Dziedzina wiedzy, jaką jest analiza decyzyjna, to systematyczne, zorganizowane podejście, pozwalające menedżerom i analitykom z różnych dziedzin nauki podejmować decyzje w warunkach niepewności i ryzyka. Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności oznacza, że nie znamy prawdopodobieństwa wystąpienia przyszłych stanów, a ich pojawienie się ma charakter losowy. Nieformalnie na potrzeby pracy wykorzystano założenie sformułowane przez Bayesa, które mówi, że jeśli nie występuje różnica pomiędzy prawdopodobieństwem różnych stanów natury, to przyjmuje się, że każda z wykluczających się sytuacji występuje z takim samym prawdopodobieństwem¹.

¹ Z. Redziak, *Wybrane aspekty podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności*, „Studia i Materiały. Miscellanea Oeconomicae” 2009, nr 13 (2), s. 12.



W teorii gier stosuje się następujące definicje: decydent, czyli osoba, która podejmuje decyzje; gra z naturą opisująca klasę problemów decyzyjnych, w których pojawia się dwóch graczy: decydent i natura. Drugi przeciwnik nie jest zainteresowany wynikiem gry, dlatego decyzje podejmowane przez naturę noszą miano stanów. Optymalną strategię można przyjąć, korzystając z różnych kryteriów decyzyjnych. Reguły oparte są na różnych założeniach i dają różne wyniki. Decydent powinien wybrać reguły decyzyjne, ustalić ich parametry, a następnie na podstawie wyliczonych wyników przyjąć optymalną strategię działania²³. W literaturze przedmiotu⁴ pojawia się szereg alternatywnych reguł decyzyjnych:

- kryterium Walda (maximin) – kryterium ostrożne, które zakłada, że zajdzie sytuacja najmniej korzystna dla podejmującego decyzję,
- kryterium optymistyczne (maximax) – przeciwieństwo kryterium Walda, zakłada jak najbardziej optymistyczny stan natury,
- kryterium Savage’a (macierz utraconych szans) – opiera się na postulacie minimalizacji oczekiwanych strat, wynikających z podjętego przez decydenta wyboru, w stosunku do najlepszej decyzji dla danego stanu natury,
- kryterium Laplace’a (Bernoulliego-Laplace’a) – wybór strategii o najwyższej wartości oczekiwanej rezultatów każdej decyzji,
- kryterium Hurwicza – określa najlepszą przeskalowaną wartość między maksymalnym a minimalnym zyskiem,
- kryterium Bayesa – podobne do kryterium Laplace’a, lecz znane są prawdopodobieństwa poszczególnych stanów natury, a wyliczana średnia jest ważona,
- kryterium Hodgesa-Lehmanna – połączenie kryteriów Walda i Bayesa, wykorzystują współczynnik pewności (*confidence*), wskazujący, które z kryteriów dominuje⁵,
- kryterium Hurwicza-Savage’a – połączenie kryteriów Hurwicza i Savage’a, współczynnik ryzyka skaluje wartości między maksymalnym a minimalnym „żalem” z macierzy utraconych szans,
- inne bardziej zaawansowane: proporcjonalnie ważne kryterium Laplace’a, proporcjonalnie ważne z „żalem” kryterium Laplace’a, kryterium nostalgiczne⁶.

² A. Bujak, Z. Śliwa, *Wybrane elementy modelu decyzyjnego (część I)*, „Zeszyty Naukowe WSOWLad” 2003, nr 1 (127), s. 19-24.

³ *Badania operacyjne*, red. E. Ignasik, PWE, Warszawa 2001, s. 158-161.

⁴ E. K. Zavadskas, L. Ustinovichius, F. Peldschus, *Development of Software for Multiple Criteria Evaluation*, „Informatica” 2003, t. 14, nr 2 (Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius), s. 265-266; Z. Jędrzejczak, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2004, s. 238-241, E. Rotarescu, *Mathematical modeling in decision making process under conditions of uncertainty in human resources training and development*, „Revista Notas de Matemática” 2011, t. 7(1), nr 303, s. 49-54.

⁵ E. K. Zavadskas, L. Ustinovichius, F. Peldschus, op. cit., s. 265-266.

⁶ C. Ioan, C.A. Ioan, A. Ioan, *New Methods in Mathematical Management of Organization*, „Acta Universitatis Danubius: Oeconomica” 2008, nr 1, s. 34-43.

Kiedy kryteria nie rozstrzygają, która z decyzji jest optymalna, można wykorzystać jako dodatkowe kryterium odchylenie średniokwadratowe⁷. W praktyce przed wykorzystaniem kryteriów decyzyjnych stosuje się czasem normalizację, czyli przekształcenie tabeli (macierzy) zysków do wartości z pewnego określonego przedziału (np. $[0,1]$). Takimi przekształceniami są: normalizacja wektorowa van Defta i Nijkampa, liniowa normalizacja Weitendorfa, normalizacja Jüttlera-Körtha, nieliniowa normalizacja Peldschusa i współpracowników, normalizacja logarytmiczna Zavadskasa i Turskisa⁸. Warto zastosować normalizację, gdy specyfika oprogramowania decyzyjnego ma pewne ograniczenia zakresu liczb, lub w celu przekształcenia różnych jednostek do cech niemianowanych. Należy zaznaczyć, że przekształcenia (zwłaszcza nieliniowe) mogą wpływać na wynik rozwiązania z różnych kryteriów decyzyjnych.

Szerzej rozpatrywane w pracy kryterium Hurwicza opiera się na wykorzystaniu współczynnika optymizmu i pesymizmu. Współczynnik optymizmu α określa poziom nadziei decydenta na uzyskanie jak najlepszego wyniku. Współczynniki optymizmu i pesymizmu stanowią dopełnienie i sumują się do 100%. Im większym optymistą jest decydent, tym mniejszy współczynnik pesymizmu, określany jako $(1 - \alpha)$. Decydent powinien ustalić współczynnik optymizmu α na podstawie indywidualnych przesłanek.

Decyzję podejmuje się na podstawie wybranego współczynnika optymizmu w następujący sposób: największy zysk (użyteczność) mnoży się przez współczynnik optymizmu, a najmniejszy – przez współczynnik pesymizmu. Następnie na podstawie sumy tych dwóch iloczynów wybiera się maksymalną wartość i odpowiadającą wynikowi decyzję.

W artykule zaproponowano nowe kryterium bazujące na algorytmie Hurwicza, pozwalające na wybór decyzji przy nieznanym współczynniku optymizmu. Częstym problemem pojawiającym się przy zastosowaniu tego kryterium jest dobór współczynnika optymizmu decydenta. Przedstawioną metodę można wykorzystać jako algorytm wspierający wybór tej zmiennej.

1. Kryterium Hurwicza

Strategia działania kryterium Hurwicza została opisana poniżej w sposób formalny. W tym celu wykorzystano następujące oznaczenia:

- dec_i – i -ta decyzja $i \in [1, \dots, n]$ (n – liczba decyzji),
- $stan_j$ – j -ty stan natury, przy czym $j \in [1, \dots, m]$ (m – liczba stanów natury),

⁷ C.A. Ioan, G. Ioan, *A method of choice of the best alternative in the multiple solutions case in the Games Theory*, „Journal of Accounting and Management” 2011, t. 1, nr 1, s. 3.

⁸ E.K. Zavadskas, Z. Turskis, *A New Logarithmic Normalization Method in Games Theory*, „Informatica” 2008, t. 19, nr 2 (Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius), s. 305-306.

- $zysk_{ij}$ – zysk dla i -tej decyzji przy j -tym stanie natury (macierz złożona z elementów $zysk_{ij}$ nazywana jest macierzą wypłat) (tab. 1),
- max_i – wartość maksymalna i -tej decyzji (formalnie $max_i = \max[zysk_{i1}, zysk_{i2}, \dots, zysk_{im}]$),
- min_i – wartość minimalna i -tej decyzji ($min_i = \min[zysk_{i1}, zysk_{i2}, \dots, zysk_{im}]$).

Tabela 1. Uogólniona macierz wypłat dla problemów decyzyjnych

	$stan_1$	$stan_2$	...	$stan_m$
dec_1	$zysk_{11}$	$zysk_{12}$	...	$zysk_{1m}$
dec_2	$zysk_{21}$	$zysk_{22}$	...	$zysk_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
dec_n	$zysk_{n1}$	$zysk_{n2}$	...	$zysk_{nm}$

Źródło: opracowanie własne.

Kryterium Hurwicza polega na wyznaczeniu wielkości d_i odpowiadającej każdej ($i \in [1, \dots, n]$), decyzji dec_i , korzystając z następującego wzoru:

$$d_i = \alpha \max_i + (1 - \alpha) \min_i \quad (1)$$

gdzie $\alpha \in [0, 1]$ oznacza współczynnik optymizmu wybrany przez decydenta. Decyzja optymalna w sensie kryterium Hurwicza zostanie określona przez wartość maksymalną wielkości d_i .

Warto zauważyć, że w niektórych przypadkach pewna decyzja jest zdominowana przez inną⁹. Decyzje zdominowane to takie, których wartości zysków są mniejsze od decyzji dominującej. Sprawia to, że niezależnie od wyboru kryterium decyzja zdominowana nigdy nie zostanie wybrana, dlatego dla uproszczenia obliczeń odrzuca się decyzje zdominowane jeszcze przed rozpoczęciem procesu decyzyjnego.

Analogicznie, gdy podejmuje się decyzję tylko na podstawie kryterium Hurwicza, również warto wskazać decyzje, które nigdy nie będą wybrane. Ponieważ algorytm Hurwicza korzysta jedynie z wartości maksymalnych i minimalnych, warunek odrzucenia decyzji zdominowanych będzie mniej restrykcyjny niż w przypadku ogólnym (wystarczy bowiem odnieść się do wartości maksymalnej i minimalnej). Postać takiej decyzji jest następująca:

Definicja 1 (zdominowanej decyzji Hurwicza)

Niech będą dane dwie decyzje dec_x i dec_y . Decyzję dec_x nazywamy zdominowaną w sensie Hurwicza przez dec_y wtedy i tylko wtedy, gdy:

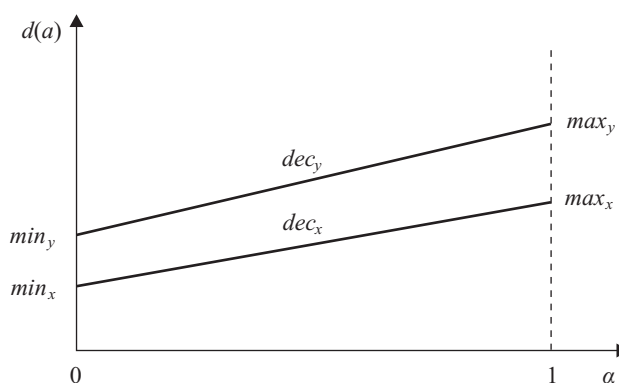
⁹ *Badania operacyjne*, op. cit., s. 237.

I: $\max_y \geq \max_x$ i $\min_y \geq \min_x$ oraz

II: $(\max_x < \max_y)$ lub $(\min_x < \min_y)$.

gdzie: $\max_x$ i $\min_x$ – wartość maksymalna i minimalna decyzji dec_x oraz $\max_y$ i $\min_y$ – wartość maksymalna i minimalna decyzji dec_y .

Warunek I oznacza, że dla dowolnego współczynnika optyimizmu α decyzja zdominowana nigdy nie może zostać wybrana. Na rysunku 1 został pokazany przykład, w którym wartość kryterialna dana wzorem (1) dla decyzji dec_y jest zawsze większa od wartości dla decyzji dec_x , w takiej sytuacji kryterium Hurwicza zawsze wskaże dec_y . Zatem niezależnie od wyboru współczynnika optyimizmu α decyzja oznaczona jako dec_x jest zdominowana i nigdy nie będzie wybrana.



Rysunek 1. Przykład decyzji dominującej (dec_y) oraz zdominowanej (dec_x), wykres zależności funkcji kryterialnej d wzór (1) w zależności od współczynnika α

Źródło: opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę, że warunek II nie jest równoważny $dec_x < dec_y$, gdyż dwie decyzje mogą mieć identyczne wartości maksymalne i minimalne, natomiast różnić się pozostałymi. Warunek II został wprowadzony w celu odrzucenia sytuacji, w których dwie decyzje mają identyczne wartości minimalne i maksymalne. Z punktu widzenia kryterium Hurwicza obie decyzje są jednakowo korzystne, trudno więc wskazać, że jedna jest bardziej rentowna od drugiej.

Dla uwarunkowania opisanego wyżej (dwie decyzje o identycznych wartościach maksymalnej i minimalnej) dobrym kryterium weryfikującym, która z decyzji jest lepsza, jest kryterium Laplace'a. Pokaże ono, która z decyzji ma większą sumaryczną wartość zysków z pozostałych stanów natury, czyli wartości znajdujące się między maksymalną a minimalną wartością również zostaną wzięte pod uwagę.

2. Kryterium Hurwicza dla różnych współczynników optymizmu α

W praktyce, kiedy decydent wykorzystuje kryterium Hurwicza, jeszcze przed rozpoczęciem obliczeń powinien wyrazić swoją skłonność do ryzyka w postaci współczynnika optymizmu α . Standardowe podręczniki do badań operacyjnych podejmujące temat gier z naturą¹⁰, nie podają jednak żadnych przesłanek co do wyboru wartości współczynnika. W literaturze przykładem wyboru współczynnika optymizmu jest ustalenie skali od 0 do 1 między wartością minimalną a maksymalną możliwego do osiągnięcia zysku, a następnie ustalenie akceptowalnego zysku i przeliczenie go do przyjętej skali¹¹. Jednak nawet jeśli decydent potrafi jednoznacznie wyrazić swoją awersję bądź upodobanie do ryzyka w postaci liczbowej, wybór nie zawsze musi być trafny.

W celu zbadania wpływu współczynnika optymizmu na wynik działania kryterium Hurwicza zostanie rozważony następujący przykład. Decydent wybrał współczynnik $\alpha = 30\%$, co zdeterminowało wybór decyzji B . Przeprowadzono jednak analizę ciągłą dla współczynnika optymizmu w przedziale od 0% do 100% i okazało się, że dla zadanego przypadku jest:

$\alpha \in [0\%, 29,99\%]$, to kryterium Hurwicza typuje decyzję A ,

$\alpha \in [29,99\%, 30,01\%]$, to kryterium Hurwicza typuje decyzję B ,

$\alpha \in [30,01\%, 100\%]$, to kryterium Hurwicza typuje decyzję C .

Zatem gdyby decydent wybrał współczynnik optymizmu 29,98% lub 30,02%, zdeterminowałoby to wybór odpowiednio decyzji A i C . Wobec tego niewielka zmiana współczynnika optymizmu istotnie wpływa na wybór decyzji. Natomiast w przypadku decydenta – umiarkowanego optymisty, który wybrał współczynnik skłonności do ryzyka na poziomie 70%, widać, że nawet gdyby ustalić 20-proc. margines błędu – rozbieżności od tej wartości, to i tak kryterium wskaże decyzję C . Wynik otrzymany dzięki kryterium Hurwicza dla wartości 70% jest dużo bardziej jednoznaczny i wartościowy niż ten dla α około 30%. Warto zatem przeprowadzić analizę współczynnika α na całym przedziale wartości w sytuacji, gdy:

- brak jakichkolwiek przesłanek co do wyboru współczynnika optymizmu,
- znany jest współczynnik optymizmu, natomiast analiza dokonywana jest w celu uwiarygodnienia wyniku bądź wychwycenia sytuacji, w której drobna zmiana współczynnika powoduje inny wybór decyzji.

Warto zwrócić uwagę, że w powyższym przykładzie przedziały współczynnika optymizmu są domknięte i nachodzą na siebie. Wynika to z tego, że wartości d_i

¹⁰ Z. Jędrzejczak, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, op. cit., s. 238-241; *Badania operacyjne*, op. cit., s. 158-161.

¹¹ Z. Redziak, op. cit., s. 13.

(por. wzór (1)) są sobie równe na granicach przedziałów (w punkcie $\alpha = 29,99\%$ jest $d_A = d_B$ oraz dla $\alpha = 30,01\%$ odpowiednio $d_B = d_C$), zatem w tych punktach kryterium Hurwicza nie rozstrzyga, która decyzja jest optymalna.

W literaturze zwraca się uwagę na punkty, w których drobna zmiana współczynnika optyimizmu powoduje zmianę decyzji jako wartości powodujące niestabilność rozwiązania¹². Dlatego zamiast analizować ustalony współczynnik optyimizmu, lepiej dokonać przeglądu na pewnym interwale.

W celu określenia wpływu współczynnika α na proces decyzyjny należy przeanalizować wielkość d_i daną wzorem (1). Aby wskazać zależność d_i od współczynnika α , zostanie ona opisana w postaci funkcyjnej:

$$d_i(\alpha) = a_i \alpha + b_i, \quad (2)$$

gdzie:

$$a_i = \max_i - \min_i, \quad b_i = \min_i. \quad (3)$$

Funkcja liniowa $d_i(\alpha)$ dla i -tej decyzji łączy punkty o współrzędnych $(0, \min_i)$ i $(1, \max_i)$ w przedziale $\alpha \in [0, 1]$. Wartość maksymalna funkcji $d_i(\alpha)$ po wszystkich decyzjach i dla dowolnego współczynnika optyimizmu α ze wskazanego przedziału odzwierciedla wynik kryterium Hurwicza. Działanie kryterium Hurwicza na podstawie funkcji kryterialnej $d_i(\alpha)$ zostało zilustrowane na rysunku 2. Kryterium wskazuje na decyzję, dla której $d_i(\alpha)$ jest większe. Można zatem odczytać z wykresu, że dla $\alpha \in [0, \alpha_{gr}]$ optymalna jest decyzja dec_x , natomiast w zakresie $\alpha \in [\alpha_{gr}, 1]$ decyzja dec_y .

Punkt, który rozgranicza dwa przedziały, oznaczony jako α_{gr} , można odnaleźć, znajdując punkt przecięcia się dwóch prostych $d_i(\alpha)$ i jest on wyrażony wzorem:

$$\alpha_{gr} = (b_y - b_x) / (a_x - a_y) = (\min_y - \min_x) / (\max_x - \max_y + \min_y - \min_x) \quad (4)$$

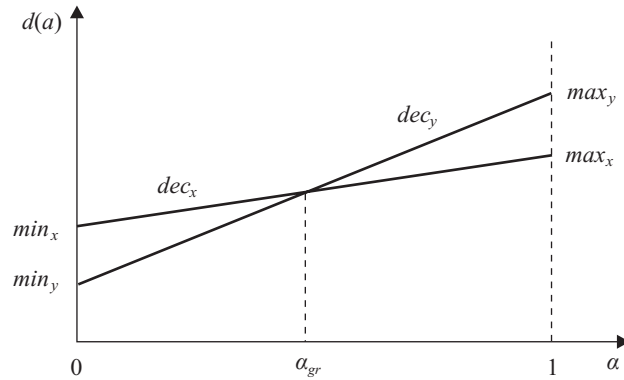
Dodatkowo funkcja kryterialna $d_i(\alpha)$ ma następujące własności:

– własność 1: $d_i(\alpha)$ jest funkcją niemalejącą; oczywiście jest, że dla dowolnej funkcji $\max_i \geq \min_i$, zatem zgodnie z wzorem (3) współczynnik kierunkowy $a_i = \max_i - \min_i \geq 0$;

– własność 2: rozważmy dwie niezdominowane decyzje dec_x, dec_y oraz odpowiadające im funkcje kryterialne: $d_x(\alpha)$ i $d_y(\alpha)$. Jeśli $\max_x > \max_y$, to funkcje liniowe $d_x(\alpha)$ i $d_y(\alpha)$ muszą przeciąć się w przedziale $\alpha \in [0, 1]$, dodatkowo spełniona jest zależność $\min_x \leq \min_y$.

Interpretację własności 2 można wyrazić w formie graficznej. Warto zauważyć, że od dwóch decyzji żąda się, aby nie były zdominowane, zatem odrzuca się

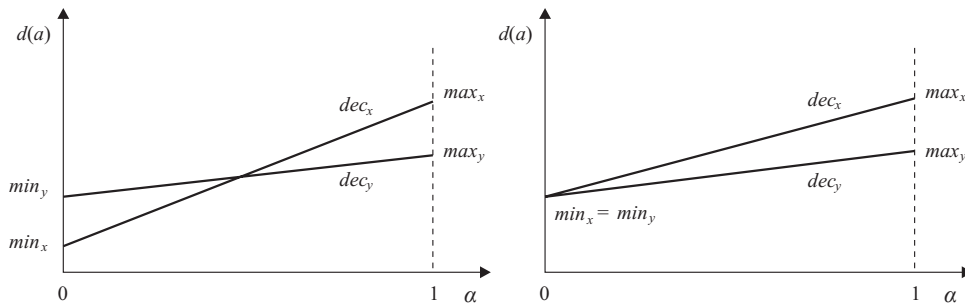
¹² R. Guillaume, G. Marques, C. Thierry, D. Dubois, *Seeking stability of supply chain management decisions under uncertain criteria*, 9th International Conference of Modeling, Optimization and Simulation – MOSIM'12, Bordeaux 2012, s. 2.



Rysunek 2. Wykresy zależności funkcji kryterialnej $d(\alpha)$ wzór (1) w zależności od współczynnika optyimizmu α z zaznaczonymi decyzjami dec_x i dec_y , punkt przecięcia w α_{gr}

Źródło: opracowanie własne.

sytuację przedstawioną na rysunku 1. Ponadto wiadomo, że wartości maksymalne obu decyzji różnią się od siebie, dlatego możliwe są tylko dwie sytuacje przedstawione na rysunku 3.



Rysunek 3. Wykresy zależności funkcji kryterialnej $d(\alpha)$ wzór (1) w zależności od współczynnika optyimizmu α . Decyzje dec_x i dec_y przecinają się: w przedziale $\alpha \in (0,1)$ wykres lewy; przy $\alpha = 0$ wykres prawy

Źródło: opracowanie własne.

Lewy wykres przedstawia przecinające się decyzje dec_x , dec_y . Skoro zostało założone, że $max_x > max_y$, to w konsekwencji powstaje zależność $min_x < min_y$. Natomiast warunek równościowy powstaje ze skrajnego przecięcia się decyzji w punkcie $\alpha = 0$ (rys. 3 prawy), czyli jeśli $max_x > max_y$, to $min_x = min_y$. Z połączenia tych dwóch zależności powstaje własność 2.

Twierdzenie 1. Uszeregowanie decyzji niezdominowanych (funkcji $d_i(\alpha)$) według niemalejących współczynników $\max_i$ ustawia w rosnącej kolejności funkcje kryterialne zgodnie ze współczynnikiem kierunkowym a_i . W ujęciu matematycznym jeśli dla zbioru decyzji dec_i i $i \in [1, \dots, n]$ i odpowiadających im funkcjom $d_i(\alpha)$ jest

$$\max_1 \leq \max_2 \leq \max_3 \leq \dots \leq \max_{n-1} \leq \max_n, \quad (5)$$

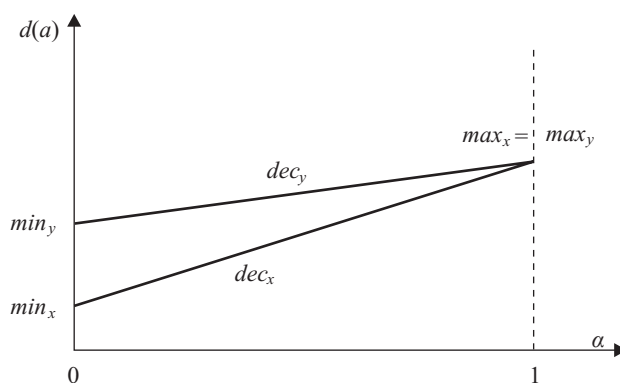
to

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n. \quad (6)$$

Dowód powyższego twierdzenia jest następujący: niech zbiór decyzji dec_i zostanie uszeregowany analogicznie do wzoru (5):

$$\max_1 \leq \max_2 \leq \dots \leq \max_y \leq \max_x \leq \dots \leq \max_{n-1} \leq \max_n, \quad (7)$$

z powyższego uszeregowania do dalszych rozważań zostaną wybrane dwie decyzje o indeksach x i y . Powołując się na własność 2, można zapisać, że jeżeli $\max_y < \max_x$, to $\min_y \geq \min_x$, jeśli dodatkowo oznaczy się $\Delta = \min_y - \min_x$, to jest, że $\Delta \geq 0$. Od lewej strony zależności $\max_y < \max_x$ można bez straty ogólności odjąć dowolną liczbę większą lub równą 0, np. Δ . Zatem $\max_y - \Delta < \max_x$ dalej jest spełnione, a więc powstaje $\max_y - \min_y < \max_x - \min_x$. Udało się zatem pokazać, że jeśli $\max_y < \max_x$, to $\max_y - \min_y < \max_x - \min_x$. Aby rozszerzyć zależność do relacji mniejszy równy jak we wzorze (7), należy rozpatrzyć uwarunkowanie, gdy $\max_y = \max_x$. Zależność taką przedstawia rysunek 4. W celu zachowania konsekwencji, analogicznie do rysunku 3 (lewy wykres), wartość $\min_y$ jest większa niż $\min_x$.



Rysunek 4. Wykres zależności funkcji kryterialnej $d(a)$ wzór (1) w zależności od współczynnika optyimizmu a . Decyzje dec_x i dec_y przecinają się w $a = 1$

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z rysunkiem 4 równanie $\max_x = \max_y$ implikuje, że $\min_y > \min_x$, dlatego $-\min_y < -\min_x$, a skoro wartości maksymalne są sobie równe, to $\max_y - \min_y < \max_x - \min_x$. Podsumowując, jeśli $\max_y \leq \max_x$, to $\max_y - \min_y < \max_x - \min_x$.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej pary nierówności ze wzoru (7). Zależność (7) rozszerza się zatem do postaci:

$$\max_1 - \min_1 < \dots < \max_y - \min_y < \max_x - \min_x < \dots < \max_n - \min_n. \quad (8)$$

Ze wzoru (3) wynika, że różnica między wartością maksymalną a minimalną określa współczynnik kierunkowy prostej $d_i(\alpha)$, dlatego po podstawieniu (3) do (8) powstaje:

$$a_1 < \dots < a_y < a_x < \dots < a_n, \quad (9)$$

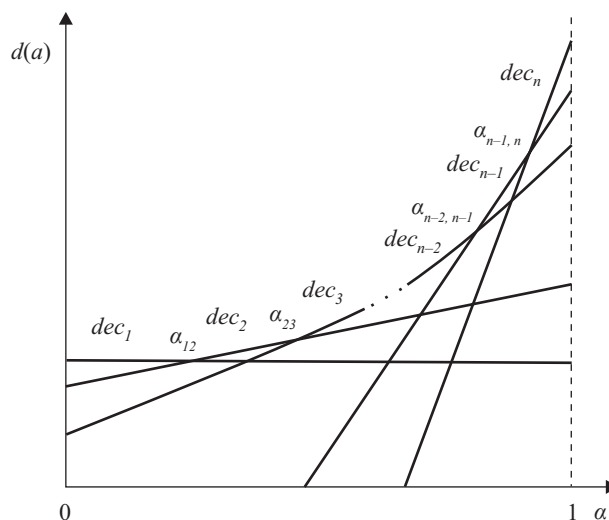
co kończy dowód.

Warto zwrócić uwagę, że warunek $\max_x > \max_y$ z własności 2 gwarantuje, że dwie funkcje decyzyjne będą się różniły. Dlatego przed przystąpieniem do obliczeń z wykorzystaniem kryterium Hurwicza decydent powinien oprócz decyzji zdominowanych usunąć też decyzje, które mają identyczne wartości ($\max_x = \max_y$, $\min_x = \min_y$). Nawet jeśli decyzje różnią się pozostałymi wartościami, to kryterium Hurwicza nie rozstrzygnie, który wybór będzie lepszy, gdyż bierze pod uwagę tylko wartości skrajne.

Warto dodać, że uwarunkowania skrajne z rysunku 4 ($\max_x = \max_y$) oraz lewy wykres rysunku 2 ($\min_x = \min_y$) nie mają praktycznego zastosowania z punktu widzenia kryterium Hurwicza, a jedynie do poprawnego przeprowadzenia dowodu. W obu sytuacjach zawsze jedna z decyzji dominuje, natomiast w punkcie przecięcia kryterium Hurwicza nie rozstrzyga, która z decyzji jest optymalna. Zatem decyzje w taki sposób zdominowane można odrzucić jeszcze przed rozpoczęciem analizy.

Konsekwencją twierdzenia 1 jest własność zilustrowana na rysunku 5. Punkty α_{ij} oznaczają położenia przecięć funkcji kryterialnych $d_i(\alpha)$ i $d_j(\alpha)$ odpowiednio dla decyzji dec_i , dec_j . Warto zauważyć, że choć dec_i ma punkty wspólne ze wszystkimi innymi funkcjami kryterialnymi, to przy uszeregowaniu zawsze pierwsze przecięcie wskazuje na zmianę decyzji w kryterium Hurwicza.

Konsekwencją twierdzenia 1 jest to, że dla dowolnej dec_i wskazanej przez kryterium Hurwicza, aby określić koniec przedziału współczynnika optyimizmu α_{ij} , sugerującej wybór decyzji dec_i i przejście do następnej decyzji dec_j w kolejności, wystarczy znaleźć najbliższe (z prawej strony) przecięcie dec_i z kolejną decyzją dec_j .



Rysunek 5. Wykres zależności funkcji kryterialnej $d(\alpha)$ wzór (1) w zależności od współczynnika optyimizmu α . Decyzje są poukładane zgodnie z rosnącymi współczynnikami kierunkowymi

Źródło: opracowanie własne.

3. Algorytm rozszerzonego kryterium Hurwicza

Idea i procedura rozszerzonego kryterium Hurwicza jest opisana następująco:

1. Z kryterium Hurwicza wylicz, na którą decyzję wskazuje współczynnik optyimizmu α z całego przedziału od 0 do 1. Wynik zapisz w postaci:

$\alpha \in [0, \alpha_1]$ wskazuje na decyzję dec_1 ,

$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ wskazuje na decyzję dec_2 ,

...

$\alpha \in [\alpha_{k-1}, 1]$ wskazuje na decyzję dec_k .

2. Wybierz decyzję z największym przedziałem współczynnika optyimizmu.

Krok pierwszy rozszerzonego kryterium Hurwicza wykonamy za pomocą algorytmu, którego wejściem, podobnie jak każdej innej gry z naturą, jest macierz wypłat (tab. 1), natomiast wyjściem – zbiór przedziałów wartości współczynnika optyimizmu z przypisanymi decyzjami. Algorytm składa się z następującej sekwencji kroków:

Algorytm wyliczania przedziałów:

1. Uporządkuj decyzje według wartości maksymalnych (max_i) od najmniejszej do największej, tworząc wektor uszeregowanych decyzji $[dec_1, dec_2, \dots, dec_n]$.

2. Stwórz tabelę pomocniczą (tab. 2) wymiaru $n \times n$, gdzie n oznacza liczbę decyzji (wymiar tabeli z nagłówkami to $n + 1 \times n + 1$). Punkty przecię poszczególnych decyzji wyrażają się wzorem $\alpha_{ij} = (min_j - min_i) / (max_i - max_j + min_j - min_i)$.

Tabela 2. Pomocnicza tabela rozszerzonego kryterium Hurwicza, pokazująca współrzędne α przecięć funkcji $d(\alpha)$ dla odpowiednich decyzji $dec_1, dec_2, \dots, dec_n$

decyzje	dec_1	dec_2	dec_3	...	dec_{n-1}	dec_n
dec_1	$\times$	α_{12}	α_{13}	...	$\alpha_{1,n-1}$	α_{1n}
dec_2	$\times$	$\times$	α_{23}	...	$\alpha_{2,n-1}$	α_{2n}
dec_3	$\times$	$\times$	$\times$	...	$\alpha_{3,n-1}$	α_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
dec_{n-1}	$\times$	$\times$	$\times$	...	$\times$	$\alpha_{n-1,n}$
dec_n	$\times$	$\times$	$\times$	...	$\times$	$\times$

Źródło: opracowanie własne.

3. Analizę tabeli 2 zacznij od decyzji pierwszej ($dec_w = dec_1$), czyli wiersza pierwszego ($w = 1$). Współrzedną określającą poprzednie przecięcie ustaw na 0 ($\alpha_{pop} = 0$). Wyzeruj zbiór rozwiązań.

4. W tabeli 2 znajdź minimum w wierszu w (dec_w), przez α_{wj} oznacz wartość minimalną. Jeśli wartość najmniejsza powtarza się, to za α_{wj} wybierz tę z kolumny najbardziej po prawej (j – nr kolumny, w – nr wiersza). Natomiast pozostałe wartości minimalne (j' – nr kolumny) dodaj do zbioru rozwiązań:

$\alpha = \alpha_{wj}$, wskazuje na decyzję $dec_{j'}$.

Następnie do zbioru rozwiązań dodaj przedział:

$\alpha \in [\alpha_{pop}, \alpha_{wj}]$ wskazuje na decyzję dec_w .

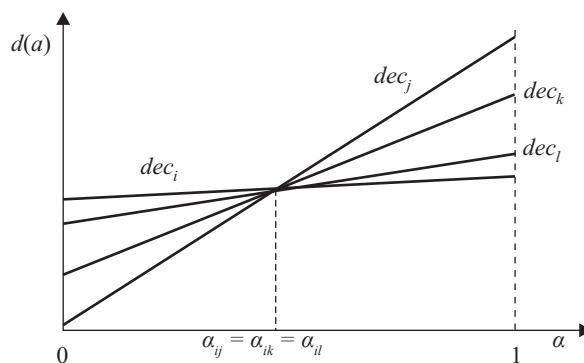
Jeśli nie koniec $j < n$ (są jeszcze wiersze), to przejdź do wiersza j ($w = j$), poprzedniemu przecięciu przypisz $\alpha_{pop} = \alpha_{wj}$. Natomiast gdy koniec $j = n$ (przejście do ostatniego wiersza), to do zbioru rozwiązań przypisz:

$\alpha \in [\alpha_{wj}, 1]$ wskazuje na decyzję dec_n .

W wyniku działania algorytmu otrzymujemy sekwencję przedziałów współczynnika optyimizmu ze wskazaniem odpowiednich decyzji. Poprawność jego działania wynika bezpośrednio z twierdzenia 1. Uporządkowanie według wartości maksymalnych gwarantuje, że dla danej prostej decyzyjnej (dec_w) $d_w(\alpha)$ najmniejsze α wskazuje na przejście kryterium na kolejną decyzję (por. rys. 5), co wyjaśnia ideę działania algorytmu (kroku 4.).

Krok 1. to ułożenie decyzji według rosnących wartości maksymalnych, co jest warunkiem skorzystania z twierdzenia 1. W kroku 2. zostają zestawione punkty przecięć poszczególnych prostych. Tabela 2 jest symetryczna względem elementów na głównej przekątnej, dlatego wystarczy uzupełnić elementy nad główną przekątną. Symetria wynika z tego, że niezależnie od wyboru kolejności prostych do obliczania, przetną się one w tym samym punkcie. Krok 3. określa warunki początkowe: start od pierwszej decyzji i początek pierwszego przedziału na 0. W rozwiązaniu zawsze musi pojawić się decyzja dec_1 (o najmniejszym maxi-

mum) i decyzja dec_n (o największym maksimum), co determinuje pojawienie się przedziałów $\alpha \in [0, \alpha_i]$ i $\alpha \in [\alpha_p, 1]$ (krok 3 i 5). Krok 4. wskazuje, że kolejną decyzją jest ta, która ma najmniejszy punkt przecięcia z aktualnie rozważaną (twierdzenie 1). W kroku 4 została uwzględniona sytuacja, gdy pojawia się kilkakrotnie ta sama wartość minimalna (uwarunkowanie to zostało ukazane na rys. 6). Punkt $\alpha_{ij} = \alpha_{ik} = \alpha_{il}$ jest miejscem, gdzie kryterium Hurwicza nie rozstrzyga, która z decyzji jest najlepsza. Dlatego należy albo zaznaczyć brak rozstrzygnięcia, albo wskazać, że dla danego współczynnika optyimizmu α_{ij} kryterium wskazuje równocześnie na kilka decyzji. Zgodnie z rysunkiem 6 jest: $\alpha \in [0, \alpha_{ij}]$, to dec_p , $\alpha = \alpha_{kp}$, to dec_k , $\alpha = \alpha_{il}$, to dec_l , $\alpha \in [\alpha_{ij}, 1]$, to dec_j . Tak też zostało to zapisane w kroku 4.



Rysunek 6. Wykresy zależności funkcji kryterialnej $d(\alpha)$ wzór (1) w zależności od współczynnika optyimizmu α . Decyzje dec_p , dec_j , dec_k , dec_l przecinają się w tym samym punkcie

Źródło: opracowanie własne.

Warunek stopu (krok 5.) wynika bezpośrednio z analizy tabeli 2 – przejście do wiersza n oznacza koniec, ponieważ dana decyzja nie przecina się już z żadną inną z prawej strony.

Zaletą algorytmu wykorzystującego twierdzenie 1 jest prostota implementacji w systemach komputerowych. Podobne rozwiązanie można uzyskać metodą graficzną, przez porównanie poszczególnych funkcji decyzyjnych $d_i(\alpha)$ z funkcją $f(\alpha) = \max[d_1(\alpha), d_2(\alpha), \dots, d_n(\alpha)]$ przy $\alpha \in [0, 1]$. Rozwiązanie takie będzie zadowalające zależnie od ustalonego marginesu błędu. Formalnie w celu wskazania komputerowi, które współczynniki optyimizmu wskazują na jakie decyzje o indeksie i , trzeba by rozwiązać $\alpha \in f(\alpha) \cup d_i(\alpha)$ lub dokonać skomplikowanej analizy przecięć poszczególnych prostych kryterialnych. Implementacja opisanego wyżej postępowania w języku programowania niskiego poziomu jest bardzo skomplikowana, dlatego lepiej skorzystać z algorytmu wyliczania przedziałów bazującego na twierdzeniu 1.

4. Zastosowanie rozszerzonego kryterium Hurwicza w logistyce

Problemy decyzyjne pojawiają się w głównych dziedzinach logistyki, takich jak: zarządzanie logistyczne, transport i magazynowanie. Wśród nich istnieje wiele obszarów, w których należy dokonywać wyborów, np. informatyzacja, obsługa klientów, zarządzanie zapasami, zaopatrywanie firmy, dystrybucja, edukacja logistyczna, wybór rodzaju i środków transportu, bezpieczeństwo transportu, monitorowanie ruchu, obsługa odbiorców, wybór liczby, kosztów, kubatury, formy własności, lokalizacji, organizacji i wyposażenia magazynów¹³.

Rozważmy prosty przykład wyboru środka transportu. Załóżmy, że decydent w małej firmie logistycznej musi podpisać umowę z dostawcą, ale nieznana jest liczba przesyłanych materiałów w zakładanym czasie. Decydent dysponuje jedynie szacunkowymi zyskami (wyrażone w tys. zł) uzależnionymi od wyboru dostawcy i stanów natury – wielkości przesyłanego zamówienia. Dane zostały zestawione w tabeli 3.

Tabela 3. Macierz wypłat dla rozpatrywanego przykładu wyboru środka transportu

Dostawcy	Wielkość zamówienia			
	ponad 10 000 ton	ponad 8000 ton	ponad 6000 ton	ponad 4000 ton
A	60	30	35	10
B	50	45	45	20
C	40	40	40	40

Źródło: opracowanie własne.

Kryterium Laplace'a, które w praktyce jest średnią arytmetyczną, nie rozstrzyga, czy wybrać decyzję B, czy C (średnia wynosi 40). Rozwiązania nie uzyskuje się także, korzystając z kryterium Savage'a, dlatego decydent zdecydował się rozstrzygnąć wynik rozszerzonym kryterium Hurwicza (nie jest znany współczynnik optymizmu).

Najpierw zostanie wykorzystany algorytm wyliczania przedziałów. W pierwszym kroku należy ułożyć decyzję rosnąco według wartości maksymalnej: jest $\max_A = 60$, $\max_B = 50$, $\max_C = 40$, zatem spełniają określony porządek. Następnie należy stworzyć tabelę pomocniczą z punktami przecięć (tab. 4) (wartości przecięć – wzór (4)).

W wierszu 1 wartością minimalną jest 0,5, zatem do rozwiązania dodaje się przedział $\alpha \in [0; 0,5]$, co wskazuje na decyzję dec_A . Ponieważ 0,5 znajduje się w

¹³ E. Chylak, *Logistyka małych i średnich przedsiębiorstw*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Celnej” 2004, nr 6, s. 3.

Tabela 4. Pomocnicza tabela rozszerzonego kryterium Hurwicza dla rozpatrywanego przykładu

Decyzje	dec_A	dec_B	dec_C
dec_A	×	0,5	0,6
dec_B	×	×	0,6(6)
dec_C	×	×	×

Źródło: opracowanie własne.

kolumnie 2., należy przejść do 2. wiersza. W wierszu 2. wartość minimalna to 0,6(6) zatem kolejnym przedziałem rozwiązania jest $\alpha \in [0,5; 0,6(6)]$, co wskazuje na decyzję dec_B . Ponieważ 0,6(6) znajduje się w kolumnie 3., należy przejść do 3 wiersza, jako że nie ma już więcej przecięć należy zakończyć działanie procedury dodając $\alpha \in [0,6(6); 1]$, co wskazuje na decyzję dec_C . Podsumowując:

- $\alpha \in [0; 0,5]$ wskazuje na decyzję dec_A ,
- $\alpha \in [0,5; 0,6(6)]$ wskazuje na decyzję dec_B ,
- $\alpha \in [0,6(6); 1]$ wskazuje na decyzję dec_C .

Najszerzy przedział współczynnika optyimizmu wskazuje na decyzję A, zatem strategią rozszerzonego kryterium Hurwicza jest decyzja A. Szczegółowe zestawienie kolejnych kroków algorytmu wyliczenia przedziałów wraz z opisem zmiennych zawiera tabela 5.

Tabela 5. Zestawienie kolejnych kroków algorytmu wyliczania przedziałów dla rozpatrywanego przykładu

Kroki	Formalne wyliczenia
Krok 1	$\max_A = 60 > \max_B = 50 > \max_C = 40$, stąd ustawienie decyzji: dec_A, dec_A, dec_A
Krok 2	$\alpha_{AB} = (\min_B - \min_A) / (\max_A - \max_B + \min_B - \min_A) = (20 - 10) / (60 - 50 + 20 - 10) = 0,5$ $\alpha_{AC} = (\min_C - \min_A) / (\max_A - \max_C + \min_C - \min_A) = (40 - 10) / (60 - 40 + 40 - 10) = 0,6$ $\alpha_{BC} = (\min_C - \min_B) / (\max_B - \max_C + \min_C - \min_B) = (40 - 20) / (50 - 40 + 40 - 20) = 0,6(6)$
Krok 3	$w = 1, \alpha_{pop} = 0$
Krok 4	Minimum z wiersza $w = 1$ to 0,5, stąd kolumna $j = 2, \alpha_{wj} = \alpha_{12} = 0,5$, dlatego rozwiązanie: $\alpha \in [\alpha_{pop}, \alpha_{wj}] = [0; 0,5]$ wskazuje na decyzję $dec_w = dec_1$
Krok 5	Sprawdzenie warunku stopu $j = 2 < n = 3$ zatem krok 4, ustawienie zmiennych: $\alpha_{pop} = \alpha_{12} = 0,5, w = 2$
Krok 4	Minimum z wiersza $w = 2$ to 0,6(6), stąd kolumna $j = 3, \alpha_{wj} = \alpha_{23} = 0,6(6)$, dlatego rozwiązanie: $\alpha \in [\alpha_{pop}, \alpha_{wj}] = [0,5, 0,6(6)]$ wskazuje na decyzję $dec_w = dec_2$
Krok 5	Sprawdzenie warunku stopu $j = 3 \in n = 3$, zatem koniec, dodanie rozwiązania: $\alpha \in [\alpha_{wj}, 1] = [0,6(6), 1]$ wskazuje na decyzję $dec_n = dec_3$

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono rozszerzone kryterium Hurwicza, działające na podstawie jego standardowego wariantu znanego z teorii gier. Wybór decyzji przyjmuje postać bezparametryczną w stosunku do oryginalnej wersji. Decydent nie musi znać współczynnika optymizmu, natomiast kryterium wskazuje na przedziały tego parametru i odpowiadające im wyniki. Największy z przedziałów wskazuje na strategię, jaką powinien przyjąć decydent. Esencją przedstawionej metody jest algorytm wyliczania przedziałów opierający się na przedstawionych w pracy własnościach. Twierdzenie 1 pokazuje, że uszeregowanie decyzji według rosnących wartości maksymalnych każdej kolejnej decyzji daje ułożenie, w którym najbliższe przecięcie prostej decyzyjnej powoduje przejście do kolejnej decyzji (por. rys. 5). Wykorzystanie tego spostrzeżenia znacznie upraszcza wyliczenie przedziałów wskazujących na poszczególne decyzje.

Szersze spojrzenie na kryterium Hurwicza pozwala również lepiej zrozumieć wpływ współczynnika optymizmu na rozwiązanie oraz może zostać wykorzystane jako pomocnicze narzędzie przy wyborze wartości poziomu nadziei decydenta na uzyskanie zysku. W przypadku nieznanomości współczynnika optymizmu można zastosować:

- rozszerzone kryterium Hurwicza w przedstawionej postaci, czyli wybrać strategię z największym przedziałem współczynnika optymizmu,
- rozszerzone kryterium Hurwicza (algorytm wyliczania przedziałów) jako wsparcie przy wyborze współczynnika optymizmu. Nawet jeśli decydent nie zna współczynnika optymizmu, to zapewne potrafi wskazać przesłanki co do jego wartości (pesymizm bądź optymizm). Jako optymistą może sprawdzić w zakresie 50-100% (pesymista 0-50%), na które z decyzji wskazuje kryterium Hurwicza i na bazie tych informacji wybrać optymalny współczynnik. Formalnie skorzysta się więc ze standardowego kryterium Hurwicza.

W przypadku znajomości współczynnika optymizmu rozszerzone kryterium Hurwicza (algorytm wyliczania przedziałów) służy decydentowi jako narzędzie do wykrywania niestabilności rozwiązania, czyli sytuacji, w których drobna zmiana współczynnika optymizmu wpływa na inny wybór decyzji ze standardowego kryterium Hurwicza. Możliwe są trzy przypadki:

- rozwiązanie stabilne – daleko od punktów rozgraniczających wybór innych decyzji, bardzo dobre rozwiązanie, ponieważ decydent ma pewność, że w określonym przedziale strategia jest niewrażliwa na wybór współczynnika optymizmu;
- rozwiązanie niestabilne blisko punktu granicznego – wybrany współczynnik optymizmu leży blisko punktu, który wskazuje na inną decyzję. Należy w takim przypadku zwiększyć współczynnik optymizmu, jeśli decydent jest optymistą, bądź zmniejszyć w przypadku pesymisty, aby uzyskać stabilne rozwiązanie;

– rozwiązanie niestabilne blisko kilku punktów granicznych – niewielkie zmiany wybranego współczynnika optyimizmu powodują wybór innych decyzji. Jeśli decydent jest przekonany do wybranego α , to powinien przyjąć rozwiązanie ze świadomością niestabilności. W przeciwnym wypadku zaleca się skorzystać z innych kryteriów, gdyż kryterium Hurwicza daje wynik bardzo wrażliwy na wybór parametru.

Ponadto decydent powinien zdefiniować pojęcia „blisko” i „daleko”, czyli określić, jaki przedział (procentowy) współczynnika optyimizmu określający daną decyzję jest dla niego zadowalający.

Zaproponowane metody mają wymiar praktyczny i mogą być zastosowane przez organizację do wspomagania systemów podejmowania decyzji. Dodatkowo rozszerzone kryterium Hurwicza i algorytm wyliczania przedziałów został zaprezentowany w formie procedury, łatwej do zaimplementowania w systemach komputerowych.

Literatura

- Bujak A., Śliwa Z., *Wybrane elementy modelu decyzyjnego (część I)*, „Zeszyty Naukowe WSOW-Lad” 2003, nr 1 (127).
- Chylak E., *Logistyka małych i średnich przedsiębiorstw*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Celnej” 2004, nr 6.
- Guillaume R., Marques G., Thierry C., Dubois D., *Seeking stability of supply chain management decisions under uncertain criteria*, 9th International Conference of Modeling, Optimization and Simulation – MOSIM’12, Bordeaux 2012.
- Badania operacyjne*, red E. Ignasik, PWE, Warszawa 2001.
- Ioan C., Ioan C.A., Ioan A., *New Methods in Mathematical Management of Organization*, „Acta Universitatis Danubius: Oeconomica” 2008, nr 1.
- Ioan C.A., Ioan G., *A method of choice of the best alternative in the multiple solutions case in the Games Theory*, „Journal of Accounting and Management” 2011, t. 1, nr 1.
- Jędrzejczak Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A., *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- Redziak Z., *Wybrane aspekty podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności*, „Studia i Materiały. Miscellanea Oeconomicae” 2009, nr 13 (2).
- Rotarescu E., *Mathematical modeling in decision making process under conditions of uncertainty in human resources training and development*, „Revista Notas de Matemática” 2011, t. 7 (1), nr 303.
- Zavadskas E. K., Turskis Z., *A New Logarithmic Normalization Method in Games Theory*, „Informatica” 2008, t. 19, nr 2 (Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius).
- Zavadskas E. K., Ustinovichius L., Peldschus F., *Development of Software for Multiple Criteria Evaluation*, „Informatica” 2003, t. 14, nr 2 (Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius).

Extended Hurwicz criterion of decision making in logistic processes

Summary. This paper presents a new criterion for decision-making based on one of the most popular game theories- Hurwicz criterion. Properties of the criterion function was presented and applied to the new decision-making algorithm. Hurwicz criterion may also be used as a new tactics of selection or assessment of the optimism index in traditional Hurwicz criterion.

Key words: logistics, decision-making problems, games against nature, Hurwicz criterion, optimism index